

$$\textcircled{1} \text{ 2) } f(x) = 1 + 4x + x^2 h(x)$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 4x + x^2 h(x) - (1 + 4(0) + 0^2 h(0))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + 4x + x^2 h(x) - \cancel{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 4 + x h(x) //$$

$h(x)$ es una función acotada

$$|h(x)| \leq M \quad \text{para algún } M > 0$$

$$-M \leq h(x) \leq M, \quad x > 0$$

$$-Mx \leq xh(x) \leq Mx$$

Cuando $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xh(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 4 + xh(x) = 4, \quad f'(0) = 4$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x}_{0} = 0$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \\ -x^2 &\leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f(0)=0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Para $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 1$$

Para $x \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) + h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m, & x \leq 1 \\ -x^2 + nx, & x > 1 \end{cases}$$

Análisis de continuidad

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 5x + m = -4 + m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + nx = -1 + n$$

$$f(1) = 1 - 5 + m = -4 + m$$



$$-4 + m = -1 + n$$

$$\Rightarrow m = 3 + n$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x < 1 \\ -2x + n, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - 5 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -2x + n = -2 + n$$

$$\exists f'(x)$$

$$\Leftrightarrow -3 = -2 + n$$

$$\Rightarrow n = -1$$

$$m = 3 + (-1)$$

$$= 2 //$$

$$d) y = f\left(\frac{x}{x-2}\right), \quad f'(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \left(\frac{x}{x-2}\right)' = f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \left(\frac{x-2-x}{(x-2)^2}\right) \\ &= f'\left(\frac{x}{x-2}\right) * \left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right) \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\frac{x}{x-2} - 1}{\left(\frac{x}{x-2}\right)} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x} \right) \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } (f' \circ g')(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [(f' \circ g')(x)] = \frac{d}{dx} [\underbrace{f'(g(x))}_{\text{}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{}}]$$

$$= f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

$$\frac{d}{dx} [(f \circ g)'(x)] = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [(f \circ g)'(x)] &= f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + f''(g(x)) \cdot 2(g'(x))g''(x) \\ &\quad + f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + \\ &\quad f'(g(x)) \cdot g'''(x) \end{aligned}$$

$$2) \quad b) \quad \underbrace{f(g(x)) = 8x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}}_{g''(2) = ?} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dati:} \\ g(2) = 4 \\ f'(4) = 2 \\ f''(4) = g'(2) = -2 \end{array} \right.$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 16x$$

$$f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x) = 16$$

$$f''(g(2)) (g'(2))^2 + f'(4) \cdot g''(2) = 16$$

$$(-2)(4) + 2g''(2) = 16$$

$$\Rightarrow g''(2) = 12$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } U(p) = 2p e^{-0.1p}$$

$$U'(p) = 2 e^{-0.1p} - 0.2 p e^{-0.1p}$$

$$\text{when } p=5$$

$$U'(5) = 2 e^{-0.5} - e^{-0.5} = e^{-0.5}$$

por cada unidad adicional vendida a precio de 5um, la compañía obtendría una utilidad adicional de $e^{-0.5} \text{ um}$

la utilidad marginal representa el cambio en la utilidad total respecto al cambio en el precio p

$$b) \quad \overline{C(q)} = \frac{a}{4}q + a + \frac{70}{q}, \quad a > 0$$

$$\begin{aligned} C^T(q) &= \overline{C(q)} \times q \\ &= \frac{a}{4}q^2 + aq + 70 \end{aligned}$$

Entonces el costo Marginal viene dado de la siguiente manera

$$CM_g = \frac{dCT}{dq} = \frac{a}{2}q + a$$

$$CT(2) = 100$$

$$\frac{a(4)}{4} + a(2) + 70 = 100$$

$$\Rightarrow a = 10$$

$$\Rightarrow CM_g(10) = \frac{10}{2}(10) + 10 = 60 \text{ um}$$

El costo marginal=60 indica que el costo adicional por producir una unidad adicional del producto, cuando ya se están produciendo 10und, es de 60um

c) Recordar que el ingreso total: $IT = p \cdot q$

De la ecuación de la demanda: $p = 20 - q$

$$IT(q) = (20 - q)q = 20q - q^2$$

función de utilidad: $U(q) = IT - CT$

$$UM_g(q) = IM_g(q) - CM_g(q)$$

$$= 20 - 2q - (3q^2 + 4)$$

$$= -3q^2 - 2q + 16$$

$$UM_g(1) = 11$$

la utilidad marginal de 11 indica que al aumentar la producción en una unidad adicional, la utilidad del monopolista aumenta en 11 unidades monetarias.

$$(4) \quad 2) \quad 1 + x^3 y + x = \sqrt{y}$$

\Downarrow

$$3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$$

quando $x=0 \Rightarrow y=1$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$$

$$y(x) \approx y(0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \cdot x$$

$$= 1 + 2x$$

b) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ r : radius della base cono
 h : es la altura del cono

$$h = 2r = 2(2) = 4 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (2)^2 (4) = \frac{16}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\Delta r = 0.01 \text{ cm}$$

$$\Delta V \approx \left(\frac{dV}{dr} \right) \Delta r$$

$$\left\{ \frac{dV}{dr} = \frac{1}{3} \pi (2r) h \right.$$

$$\Delta V = \left(\frac{16\pi}{3} \right) (0.01) \approx 0,16752 \text{ cm}^3$$